تحلیل کمانش و ارتعاش آزاد صفحه‌های خمشی با ضریب کشسانی غیرقطعی بااستفاده‌از روش اجزای محدود تصادفی*

(یادداشت پژوهشی)

محمد کارکن[۱]		سلیمان قوهستانی[۲]		فرزاد شهابیان[۳]

چکیده *در این پژوهش اثر عدم‌قطعیت ضریب کشسانی صفحه بر پاسخ ارتعاش آزاد و کمانش آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، ضریب کشسانی صفحه به‌صورت متغیر تصادفی با توزیع نرمال الگوسازی می‌شود. همچنین، تابع خودهمبستگی فاصله‌ای برای میدان تصادفی به‌کار می‌رود. در این شیوه، میزان همبستگی به فاصله وابسته می‌گردد. به‌گونه‌ای که با دور شدن نقاط از هم، میزان همبستگی نیز کاهش می‌یابد. سپس، با بهره‌جویی از راهکار توانمند اجزای محدود و به‌کارگیری شبیه‌سازی مونت کارلو، رابطه‌های اجزای محدود تصادفی استخراج می‌گردد. برای این منظور یک جزء چهار گرهی کیرشهف با دوازده درجهٔ آزادی به‌کار می‌رود. برای تحلیل نیز، متغیر تصادفی ۵۰۰۰ بار شبیه‌سازی می‌گردد. در پایان، با انجام آزمون‌های عددی، اثر عدم‌قطعیت ضریب کشسانی بر روی بسامدهای طبیعی و بارهای کمانشی صفحه مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج این آزمون‌ها نشان می‌دهد که تغییر ضریب کشسانی صفحه تأثیر متفاوتی بر روی پاسخ ارتعاشی و کمانش صفحه دارد؛ به گونه‌ای که ضریب تغییرات پاسخ ارتعاش آزاد حدود نصف ضریب تغییرات بار کمانشی صفحه است. همچنین، آزمون‌های عددی آشکار می‌سازند که ضریب تغییرات بار کمانشی فشاری با کمانش برشی برابر هستند.*

واژه‌های کلیدی اجزای محدود تصادفی، صفحهٔ خمشی، کمانش، ارتعاش آزاد، شبیه‌سازی مونت کارلو

Stability and Free Vibration Analysis of Plates with Random Material Property using Stochastic Finite Element Method

M. Karkon		S. Ghouhestani		F. Shahabian

Abstract *This study aims to investigate the influence of the plate uncertainty elastic modulus on free vibration response and buckling behavior. To this purpose, elastic modulus of plate is modeled as a random variable with a normal distribution. Spatial autocorrelation function is used for random fields. In this method, the correlation is dependent on the distance, as the points be far away from each other, the correlation is also reduced. Then, applying the powerful finite element method stochastic finite element relations were calculated using Monte Carlo simulation. To this purpose, a four-node Kirchhoff's element was used with twelve degrees of freedom. For the analysis, random variable is simulated 5,000 times. At last, by numerical tests, the effects of uncertainty on elastic modulus are investigated on the natural frequencies and buckling loads of plate. The results of these tests show that the effect of uncertainty in elastic modulus of the plate has a different effect on the response of vibration and buckling of plate. So that these changes have low effect on free vibration responses of plate. But buckling loads are highly dependent on the elasticity coefficient.*

Key Words Stochastic Finite Element, Plate Bending, Buckling, Free Vibration, Monte-Carlo Simulation

*تاریخ دریافت مقاله ۹۶/۳/۱٤ و تاریخ پذیرش آن ۹۷/۳/۱۳ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v30i2.64895

(۱) نویسندهٔ مسئول: استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لارستان، لارستان m.karkon@iaularestan.ac.ir

(۲) استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه فسا، فسا

(۳) استاد، گروه عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

مقدمه

سیستم‌های سازه‌ای همواره در شرایط عدم‌قطعیت طراحی می‌شوند. وجود نامطمئنی ذاتی در رفتار این سامانه‌ها، دانشمندان را به اهمیت تحلیل‌های با ماهیت تصادفی در بررسی سیستم‌های مهندسی واقف نموده است. عامل‌های متعددی سبب پیدایش عدم‌قطعیت در سازه می‌گردند که از آن میان می‌توان به ثابت نبودن خصوصیات مادهٔ تشکیل‌دهنده مانند ضریب کشسانی اشاره کرد [1].

از دیرباز رویهٔ معمول در برخورد با این عدم‌قطعیت‌ها استفاده از مقادیر میانگین و تئوری‌های علم آمار و احتمال بوده است. این رویه که تا به امروز در بیشتر کارهای مهندسی به‌کار می‌رود بر دو مبنای مقادیر حدی و میانگین عامل‌های با عدم‌قطعیت می‌باشد. در واقع در این شیوه به‌طوری ضمنی فرض می‌گردد که نتایج تحلیل یقین‌اندیشانه، ماهیت غیرقطعی دارد. این راهکار در اکثر موارد صحیح نیست و نمی‌تواند به یک طراحی بهینه منجر شود. راهکار تحلیل تصادفی این امکان را فراهم می‌آورد که حتی در سیستم‌های پیچیده با عدم‌قطعیت نیز بتوان به طراحی بهینه دست یافت.

یکی از ابزارهای قدرتمند در تحلیل‌های با عدم‌قطعیت، اجزای محدود تصادفی (SFEM) می‌باشد. این روش که گسترش‌یافتهٔ روش اجزای محدود معمولی می‌باشد، قابل‌استفاده در تحلیل انواع مسائل استاتیکی و دینامیکی با ماهیت تصادفی می‌باشد. یکی از شیوه‌های مرسوم در محاسبهٔ پاسخ‌های تصادفی سیستم، روش مونت کارلو (MCS) می‌باشد [2]. در این شیوه، با بهره‌جویی از تئوری‌ها و تابع‌های تصادفی، داده‌های با عدم‌قطعیت کمّی‌سازی می‌گردد. به‌دلیل سادگی و کمبود داده‌های آزمایشگاهی، اغلب از فرض گوسی‌بودن میدان‌های تصادفی استفاده می‌شود [3].

بررسی ارتعاش و کمانش صفحات کاربرد گسترده‌ای در طراحی سازه‌های مکانیکی، دریایی و هوافضایی دارد. چاکرابارتی و دای [4] با بهره‌جویی از روش مونت‌کارلو و بسط نیومن، تحلیل دینامیکی صفحه‌ها در شرایط عدم‌قطعیت عامل‌ها را به انجام رساندند. سپهوند و همکاران [5] با روش بسط چندجمله‌ای‌های سری آشوب، اثر عدم‌قطعیت ضریب کشسانی را بر ارتعاش آزاد صفحات چندسانگرد، مورد مطالعه قرار دادند. شاکر و همکاران [6, 7] با روش اجزای محدود تصادفی، تحلیل ارتعاش آزاد صفحه‌های چندلایه و FGM را انجام دادند. دای و همکاران [8] تحلیل ارتعاش آزاد صفحه‌های چندلایه با فرض تصادفی بودن ضریب کشسانی، چگالی و جهت لایه‌ها را به انجام رساندند. تحلیل ارتعاش آزاد صفحهٔ FGM با متغیرهای تصادفی، توسط طلحه و سینگ [9] انجام شد. چاکرابارتی و همکاران [10] یک روش جدید مدل‌سازی میدان تصادفی بر پایهٔ بسط چندجمله‌ای تابع همبستگی (PCFE) را برای تحلیل ارتعاش آزاد صفحه‌های چندلایه پیشنهاد دادند. با بهره‌جویی از جزء خمشی نه گرهی، نایاک و ساتاپاتی، تحلیل ارتعاش آزاد میرای صفحه‌های مرکب ساندویچی با متغیرهای تصادفی را انجام دادند [11].

گرچه تاکنون مقالات زیادی دربارهٔ ارتعاش آزاد صفحات با متغیرهای تصادفی نگارش یافته، اما پژوهش‌های کمتری در مورد اثر تصادفی‌بودن خصوصیات ماده بر روی بارهای کمانشی صفحه‌های خمشی انجام شده است. گراهام و سیرجی [12] اثر عدم‌قطعیت ضریب کشسانی را بر کمانش صفحه‌های دارای سخت‌شونده، مورد مطالعه قرار دادند. آنکار و همکاران [13,14] تحلیل کمانش فشاری و برشی صفحه‌های چندلایه با فرض تصادفی‌بودن ضریب کشسانی و جهت لایه‌ها را به انجام رساندند. تحلیل پایداری سازه‌های کشسان با عامل‌های تصادفی توسط کامینسکی و سویتا [15] انجام شد. طلحه و سینگ [16] تحلیل کمانش صفحهٔ FGM با مشخصات مصالح تصادفی زیر اثر بار حرارتی را مورد بررسی قرار دادند.

لی و همکاران [17] با روش مبتنی بر آشوب، تحلیل کمانش حرارتی صفحه‌های خمشی چندلایه با متغیرهای تصادفی را به انجام رساندند.

در این پژوهش، اثر عدم‌قطعیت ضریب کشسانی بر کمانش فشاری و برشی و نیز، ارتعاش آزاد صفحهٔ نازک خمشی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این کار، فرض می‌گردد که میدان تصادفی دارای توزیع گوسی است. همچنین، تابع خودهمبستگی فاصله‌ای برای میدان تصادفی به‌کار می‌رود. در این شیوه، تغییرات میدان در یک جزء محدود با میانگین فاصله‌ای تقریب زده می‌شود. در ادامه، با بهره‌جویی از راهکار توانمند اجزای محدود و به‌کارگیری شبیه‌سازی مونت کارلو، رابطه‌های اجزای محدود تصادفی استخراج می‌گردد. یادآوری می‌گردد که جزء چهارپهلوی چهارگرهی (MZC) با ۱۲ درجه آزادی برای تحلیل اجزای محدود به‌کار می‌رود.

شبیه‌سازی میدان تصادفی

در این پژوهش، فرض می‌گردد که ضریب کشسانی به‌طور تصادفی و متناسب با فاصله (r) بر روی سطح صفحه تغییر می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$A(r) = A_o[1 + \alpha(r)] \tag{۱}$$

در رابطهٔ کنونی A_o میانگین عامل غیرقطعی و $\alpha(r)$ میزان نوسان و تغییرات آن می‌باشد. یادآوری می‌گردد که میانگین این تغییرات صفر می‌باشد:

$$E[\alpha(r)] = 0 \tag{۲}$$

در اینجا نماد $E[\cdot]$، بیانگر مقدار میانگین می‌باشد. هم‌چنین، تابع خودهمبستگی به‌صورت زیر تعریف می‌گردد [1]:

$$R_{\alpha\alpha} = E[\alpha(r)\, \alpha(r+\xi)] \tag{۳}$$

در این رابطه، $r = (x, y)$ مختصات مکان مورد نظر (مرکز جزء) و $\xi = \left(\xi_x, \xi_y\right)$ بردار فاصلهٔ بین نقطه‌های r و $r + \xi$ (فاصلهٔ بین مرکز دو جزء) می‌باشد. با فرض همگن و همسانگرد بودن میدان تصادفی، تابع خودهمبستگی فقط به میزان فاصله $|\xi|$ و مقدار واریانس σ_α^2 وابسته می‌گردد. بنابراین، می‌توان تابع خودهمبستگی فاصله‌ای را به‌صورت نمایی زیر پنداشت [1]:

$$R_{\alpha\alpha}(\xi) = \sigma_\alpha^2 exp\left[-\left(\frac{|\xi|}{d}\right)\right] \tag{٤}$$

در رابطهٔ (٤)، عامل d طول همبستگی می‌باشد. به‌گونه‌ای‌که با افزایش d میزان هبستگی افزایش، و با کاهش آن نیز میزان همبستگی کاهش می‌یابد. همچنین، σ_α انحراف معیار $\alpha(r)$ می‌باشد. این کمیت بیانگر مقدار پراکندگی میدان تصادفی $A(r)$ می‌باشد.

در روش اجزای محدود، سازه به n جزء تقسیم می‌شود. هم‌چنین، فرض می‌گردد که مقدار میدان تصادفی درون جزء ثابت است. به‌طور معمول، هرچه تعداد جزءها افزایش یابد، دقت پاسخ نیز افزایش پیدا می‌کند. بنابراین چنان‌چه n جزء برای صفحه به‌کار رود، n مقدار تصادفی $\alpha_i = \alpha(r_i)\ \ i = 1,2, \dots, n$ وابسته به این جزءها خواهیم داشت. همبستگی این مقدارها با ماتریس کوواریانس مشخص می‌گردد. این ماتریس را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$cov[\alpha_i\ \ \alpha_j] = R_{\alpha\alpha}(\xi_{ij}) \tag{۵}$$

اگر برای هر جزء با روش مونت کارلو N شبیه‌سازی انجام شود، بردار میدان تصادفی همبسته (با میانگین صفر) $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [1]:

$$\{\alpha\} = [L]\{Z\} \tag{٦}$$

بردار $\{Z\}=\{Z_1\ ,\ Z_2\ ,\ldots\ ,\ Z_N\}$، بردار تصادفی مستقل گوسی با میانگین صفر و انحراف معیار یک می‌باشد. ماتریس پایین مثلثی $[L]$ از تجزیه چولسکی ماتریس کوواریانس $cov(\alpha_i,\alpha_j)$ به‌دست می‌آید. پس از یافتن ماتریس $[L]$، بردار تصادفی همبسته برای هر بار شبیه‌سازی محاسبه می‌شود. در حالت کلی میزان دقت در میانگین و انحراف معیار پاسخ، وابسته به تعداد نمونه‌ها می‌باشد.

رابطه‌های اجزای محدود

معادلهٔ دیفرانسیل حاکم بر کمانش صفحهٔ خمشی نازک، به‌صورت زیر می‌باشد [18]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{1}{D}\left(S_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2S_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+S_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\qquad(۷)$$

در این رابطه، عامل‌های w و D به‌ترتیب، خیز صفحه و سختی صفحه می‌باشند. هم‌چنین، عامل‌های S_x، S_y و S_{xy} به‌ترتیب، نیروهای درون صفحه در راستای محور x، y و نیروهای برشی وارد بر لبه‌های صفحه می‌باشند. در روش اجزای محدود، تابع خیز w، با تابع‌های درون‌یاب $[N]$ به جابه‌جایی‌های گرهی $\{\bar{D}\}$ وابسته می‌گردد:

$$w=[N]\{\bar{D}\}\qquad(۸)$$

با بهره‌جویی از راهکار گلرکین و هم‌چنین رابطهٔ (۸)، برای تحلیل کمانش صفحه با روش اجزای محدود معادله (۷) به‌صورت ماتریسی زیر تبدیل می‌شود:

$$det([K_{\text{total}}])=det([K]-P_{cr}[K_g]=0)\qquad(۹)$$

در رابطهٔ کنونی، $[K_{\text{total}}]$ ماتریس سختی کل سازه، $[K]$ ماتریس سختی وابسته به مواد و $[K_g]$ ماتریس سختی هندسی برای کل سازه می‌باشند. ماتریس‌های سختی مواد و هندسی $[k]$ و $[k_g]$ برای یک جزء را می‌توان به‌صورت زیر حساب کرد:

$$[k]=\int_v [B]^T[D]_e[B]dv\qquad(۱۰)$$

$$[k_g]=\int_v [A]^T[S][A]dv\qquad(۱۱)$$

عامل‌های $[N]$، $[D]_e$ و $[S]$، در رابطه‌های (۱۰ و ۱۱)، به‌ترتیب تابع‌های درون‌یاب، ماتریس مواد و ماتریس نیروهای درون صفحه می‌باشند. هم‌چنین با داشتن تابع‌های درون‌یاب، می‌توان ماتریس‌های $[B]$ و $[A]$ را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$[B]=\begin{Bmatrix}\frac{\partial^2[N]}{\partial x^2} & \frac{\partial^2[N]}{\partial y^2} & \frac{\partial^2[N]}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix}^T\qquad(۱۲)$$

$$[A]=\begin{Bmatrix}\frac{\partial[N]}{\partial x} & \frac{\partial[N]}{\partial y}\end{Bmatrix}^T\qquad(۱۳)$$

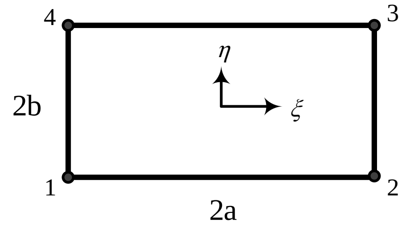
تابع‌های درون‌یاب $[N]$ برای جزء ٤ گرهی کیرشهف (MZC) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [19]:

$$[N]=\left[\{N_i^I\quad N_i^{II}\quad N_i^{III}\}\right]\quad i=1,2,3,4\qquad(۱٤)$$

$$\begin{aligned}N_i^I&=\frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(2+\xi\xi_i+\eta\eta_i-\xi^2-\eta^2)\\N_i^{II}&=\frac{a}{8}\xi_i(1+\xi\xi_i)^2(1-\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)\\N_i^{III}&=\frac{b}{8}\eta_i(1+\eta\eta_i)^2(1-\eta\eta_i)(1+\xi\xi_i)\end{aligned}\qquad(۱۵)$$

در رابطهٔ (۱۵) عامل‌های ξ و η مختصه‌های بدون بعد در جزء خمشی می‌باشند. هم‌چنین، $2a$ و $2b$ ابعاد جزء MZC در راستای محورهای x و y می‌باشند. شکل (۱)، این جزء چهار گرهی را نشان می‌دهد. هم‌چنین، ماتریس نیروهای درون صفحه $[S]$ نیز صورت زیر را دارد:

$$[S]=\begin{bmatrix} S_x & S_{xy} \\ S_{xy} & S_y \end{bmatrix} \quad (۱۶)$$



شکل ۱ جزء خمشی چهار گرهی MZC

یادآوری می‌گردد، ماتریس مواد $[D]_e$ بـرای جـزء خمشی نازک به‌صورت زیر می‌باشد:

$$[D]_e=\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (۱۷)$$

عامل‌های E، ν و t به‌ترتیـب، ضـریب کشسـانی، ضریب پواسون و ضخامت صفحه می‌باشند. چنـان‌چـه ماتریس مواد $[D]_e$ ماهیت تصادفی و غیرقطعـی داشـته باشد، این ماتریس را می‌توان برحسب عامـل تصـادفی h_α به‌صورت زیر نوشت:

$$[D]_e=h_\alpha[C]_e \quad (۱۸)$$

عامل h_α نشان‌دهندهٔ تصادفی‌بودن ماتریس مواد بر روی سطح جزء می‌باشد. همچنـین $[C]_e$ نیـز مـاتریس معین می‌باشـد. بـرای واردکـردن ماهیـت تصـادفی در روابط اجزای محدود، پارامتر تصـادفی h_α را مـی‌تـوان بـه‌صـورت جمـع دو بخـش میـانگین و انحرافـی $h_\alpha=h_0+\Delta h$ نوشت. بنابراین باتوجـه‌بـه رابطـهٔ (۱) ضریب کشسانی غیرقطعی را می‌توان به‌صـورت رابطـهٔ (۱۹) نوشت:

$$E=E_0(1+\alpha_e) \quad (۱۹)$$

باتوجه‌به غیرقطعی بودن ضریب کشسانی، ماتریس معین $[C]_e$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[C]_e=\frac{t^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (۲۰)$$

در ادامه، معادلهٔ حاکم بر ارتعاش آزاد صفحهٔ نازک خمشی آورده می‌شود. این معادله را می‌توان به‌صـورت ماتریسی زیر نوشت:

$$([K]-\omega^2[M])\{\bar{D}\}=0 \quad (۲۱)$$

در رابطهٔ کنونی، $\{\bar{D}\}$ بردار جابه‌جـایی گرهـی، ω بسامد زاویه‌ای، $[K]$ مـاتریس سـختی و $[M]$ مـاتریس جرم کل سازه می‌باشـند. یـادآوری مـی‌گـردد مـاتریس جرم $[m]$ برای جزء (MZC) را می‌توان به‌صورت زیـر حساب کرد:

$$[m]=\rho\int_v [N]^T[N]dv \quad (۲۲)$$

در رابطهٔ کنونی ρ چگالی صفحه می‌باشد.

در ادامـه، رابطـه‌هـای اجـزای محـدود تصـادفی استخراج می‌گردد. چنان‌چه مـاتریس مـواد $[D]_e$ دارای ماهیت تصادفی باشد، ماتریس سختی جزء و بـه دنبـال آن ماتریس سختی کل سازه نیز دارای ماهیت تصـادفی و غیرقطعی خواهند بود. درنتیجه پاسخ سازه نیز ماهیت تصادفی و غیرقطعی خواهد داشـت. بنـابراین مـاتریس سختی سازه نیز دو بخش میـانگین و انحرافـی خواهـد داشت:

$$[k(h)]=[k(h_0)]+[k(\Delta h)] \quad (۲۳)$$

بخش‌های میانگین و انحرافـی مـاتریس سـختی را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$[k(h_0)] = E_0 \int_v [B]^T [C]_e [B] dv \tag{۲۴}$$

$$[k(\Delta h)] = E_0 \alpha_e \int_v [B]^T [C]_e [B] dv \tag{۲۵}$$

یادآوری می‌گردد که ماتریس سختی هندسی $[k_g]$ و ماتریس جرم $[m]$، ماتریسی معین می‌باشد. با روی هم‌گذاری ماتریس‌های سختی، هندسی و نیز ماتریس جرم جزءها، ماتریس سختی، ماتریس سختی هندسی و ماتریس جرم کل سازه به‌دست می‌آید:

$$[K] = \sum_{e=1}^{n} [k(h)]_e \tag{۲۶}$$

$$[K_g] = \sum_{e=1}^{n} [k_g]_e \tag{۲۷}$$

$$[M] = \sum_{e=1}^{n} [m]_e \tag{۲۸}$$

در روش مونت‌کارلو ابتدا متغیرهای تصادفی به‌روش عددی شبیه‌سازی می‌شوند، سپس برای هر یک از متغیرهای شبیه‌سازی شده، پاسخ سازه محاسبه می‌شود. بردار متغیر تصادفی $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ می‌تواند نشان‌دهندهٔ هر یک از عامل‌های تصادفی نظیر مواد، هندسه، بار و غیره باشد. با محاسبهٔ پاسخ سازه برای تمام متغیرهای شبیه‌سازی‌شده می‌توان عکس‌العمل سازه را نسبت‌به این عامل‌های تصادفی به‌دست آورد.

آزمون عددی یکم (تحلیل کمانش)

در این بخش، برای بررسی اثر تصادفی‌بودن ضریب کشسانی بر روی کمانش فشاری (بار محوری در جهت x) و برشی صفحهٔ خمشی، یک آزمون عددی انجام می‌گیرد. برای این منظور، یک صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه‌های ساده تحلیل می‌شود. این صفحه دارای طول $a = 1\text{m}$ و ضخامت $t = 0.001\ \text{m}$ می‌باشد.

هم‌چنین، ضریب کشسانی و ضریب پواسون، به‌ترتیب $E = 200 \times 10^9\ \text{N/m}^2$ و $\nu = 0.3$ اختیار می‌گردند. با انجام تحلیل، بار کمانشی بدون‌بعد به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\bar{P}_{\text{cr}} = P_{\text{cr}} \frac{\pi^2 D}{L^2} \tag{۲۹}$$

برای تحلیل اجزای محدود، یک شبکهٔ 10×10 به‌کار می‌رود. همچنین، با بهره‌جویی از روش مونت کارلو، ۵۰۰۰ بار شبیه‌سازی تصادفی انجام شده است. در جدول‌های (۱و۲) به‌ترتیب، میزان میانگین و انحراف معیار بار کمانش فشاری برای حالت‌های مختلف متغیر تصادفی درج شده است. هم‌چنین، جدول‌های (۳و٤) نیز به‌ترتیب، میزان میانگین و انحراف معیار بار کمانش برشی را برای حالت‌های مختلف متغیر تصادفی نشان می‌دهند. یادآوری می‌گردد که، چنان‌چه ضریب کشسانی مقداری قطعی فرض گردد، با بهره‌جویی از شبکهٔ 10×10 برای کل صفحه، جزء MZC بار کمانش فشاری و برشی بدون‌بعد را به‌ترتیب، برابر با $\bar{P}_{\text{cr}} = 3.985$ و $\bar{P}_{\text{cr}} = 9.052$ به‌دست می‌دهد. با بررسی این جدول‌ها مشاهده می‌شود که با افزایش ضریب تغییرات ضریب کشسانی، میانگین و انحراف معیار بار کمانشی برای هر دو حالت کمانش فشاری و برشی افزایش می‌یابد. همچنین، این جدول‌ها آشکار می‌سازند که سرعت افزایش میانگین پاسخ کمتر از انحراف معیار است. یادآوری می‌گردد که ضریب تغییرات پاسخ از تقسیم مقدار انحراف معیار بر مقدار میانگین به‌دست می‌آید.

جدول ۱ میانگین بار کمانش فشاری برای حالات مختلف متغیر تصادفی

ضریب تغییرات	d=0.002	d=2	d=200
COV=0.1	3.9412	3.9502	3.9673
COV=0.2	3.8938	3.9399	3.9629
COV=0.3	3.8068	3.8850	3.9742

جدول ۲ انحراف معیار بار کمانش فشاری برای حالات مختلف متغیر تصادفی

ضریب تغییرات	d=0.002	d=2	d=200
COV=0.1	0.0460	0.3579	0.3908
COV=0.2	0.0940	0.7052	0.7938
COV=0.3	0.1449	1.0679	1.2043

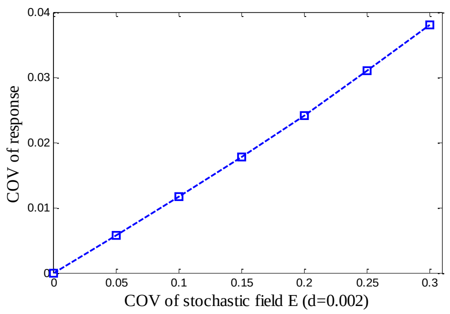
جدول ۳ میانگین بار کمانش برشی برای حالات مختلف متغیر تصادفی

ضریب تغییرات	d=0.002	d=2	d=200
COV=0.1	9.0121	9.0570	9.0117
COV=0.2	8.8986	9.0093	9.0157
COV=0.3	8.6882	8.9139	9.0311

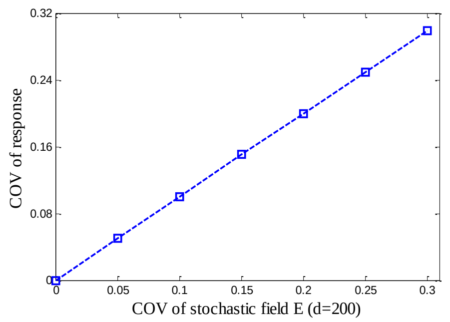
جدول ٤ انحراف معیار بار کمانش برشی برای حالات مختلف متغیر تصادفی

ضریب تغییرات	d=0.002	d=2	d=200
COV=0.1	0.1228	0.7998	0.9054
COV=0.2	0.2529	1.6645	1.7914
COV=0.3	0.3909	2.5031	2.7441

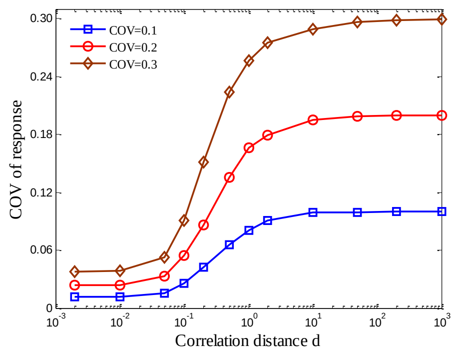
همچنین در شکل (۲)، اثر مقدار ضریب تغییرات میدان تصادفی با همبستگی کم (d=0.002) بر کمانش فشاری و برشی صفحه نشان داده شده است. شکل (۳) نیز اثر مقدار ضریب تغییرات میدان تصادفی با همبستگی کامل (d=200) را بر بار بحرانی فشاری و برشی نشان می‌دهد. باتوجه‌به نمودارها مشاهده می‌شود که تصادفی‌بودن میدان ضریب کشسانی، تأثیر زیادی بر کمانش صفحه دارد. همچنین، مشاهده می‌شود که افزایش میزان همبستگی میدان تصادفی باعث افزایش ضریب تغییرات پاسخ می‌شود، به‌گونه‌ای‌که در بحرانی‌ترین حالت، ضریب تغییرات بار کمانشی برابر با ضریب تغییرات مدول کشسانی صفحه می‌شود. برای بهتر نشان دادن این موضوع، در شکل (٤) نمودار حساسیت بار کمانش فشاری و برشی صفحه به میزان ضریب تغییرات و همبستگی میدان تصادفی نشان داده شده است.



شکل ۲ میزان تغییر ضریب تغییرات بار کمانشی در برابر ضریب تغییرات میدان تصادفی در حالت همبستگی کم



شکل ۳ میزان تغییر ضریب تغییرات بار کمانشی در برابر ضریب تغییرات میدان تصادفی در حالت همبستگی کامل



شکل ٤ میزان حساسیت بار کمانش فشاری و برشی صفحه به‌میزان ضریب تغییرات و همبستگی ضریب کشسانی

آزمون عددی دوم (تحلیل ارتعاش آزاد)

در این بخش، برای بررسی اثر تصادفی‌بودن ضریب کشسانی بر ارتعاش آزاد صفحهٔ خمشی، یک آزمون عددی انجام می‌گیرد. برای این‌منظور، یک صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه‌های ساده تحلیل می‌شود. این صفحه

دارای طول $a = 1\mathrm{m}$ و ضخامت $t = 0.001\mathrm{m}$ می‌باشد. ضریب کشسانی، ضریب پواسون و چگالی صفحه نیز به‌ترتیب $E = 200 \times 10^9\,\mathrm{N/m^2}$، $\nu = 0.3$ و $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ اختیار می‌گردند. با انجام تحلیل، عامل بدون بعد فرکانس مود اول به‌صورت زیر حساب می‌گردد:

$$\lambda_1 = \omega_1 a^2 \sqrt{\frac{\rho t}{D}} \qquad (۳۰)$$

برای تحلیل اجزای محدود، یک شبکهٔ 10×10 به‌کار می‌رود. باید دانست در صورت قطعی‌پنداشتن ضریب کشسانی، جزء MZC بسامد بدون بعد مود اول را برابر با $\lambda_1 = 19.6356$ به‌دست می‌دهد. همچنین، با بهره‌جویی از روش مونت‌کارلو، 5000 بار شبیه‌سازی تصادفی انجام شده است. در جدول‌های (۵ و ٦) به‌ترتیب، میزان میانگین و انحراف معیار بار بسامد مود اول برای حالت‌های مختلف متغیر تصادفی درج شده است. باتوجه‌به این جدول‌ها، مشاهده می‌شود که میانگین پاسخ در تمامی حالت‌ها تقریباً یکسان است، اما انحراف معیار پاسخ، با افزایش همبستگی و نیز ضریب تغییرات مدول کشسانی، افزایش می‌یابد.

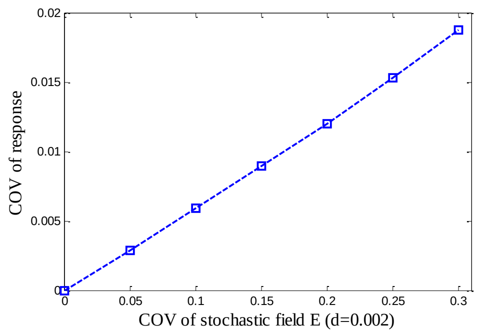
جدول ۵ میانگین بار کمانش فشاری برای حالات مختلف متغیر تصادفی

ضریب تغییرات	d=0.002	d=2	d=200
COV=0.1	19.5967	19.6190	19.5991
COV=0.2	19.4789	19.5615	19.5948
COV=0.3	19.2893	19.2556	19.4255

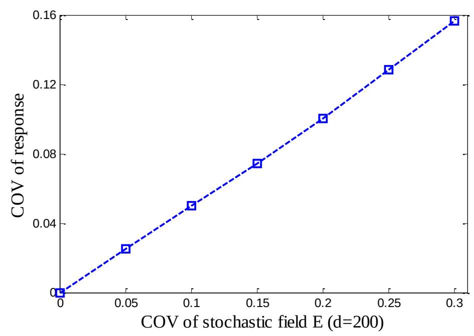
جدول ٦ انحراف معیار بار کمانش فشاری برای حالات مختلف متغیر تصادفی

ضریب تغییرات	d=0.002	d=2	d=200
COV=0.1	0.1163	0.8631	0.9791
COV=0.2	0.2361	1.7949	2.0039
COV=0.3	0.3616	2.7879	3.0391

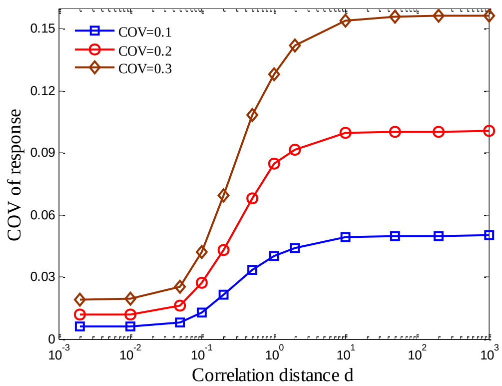
در شکل (۵)، اثر مقدار ضریب تغییرات میدان تصادفی با همبستگی کم (d=0.002)، بر پاسخ ارتعاش آزاد نشان داده شده است. شکل (٦) نیز اثر مقدار ضریب تغییرات میدان تصادفی با همبستگی کامل (d=200) را بر پاسخ ارتعاش آزاد نشان می‌دهد. در شکل (۷) نیز نمودار حساسیت پاسخ ارتعاش به میزان ضریب تغییرات و همبستگی میدان تصادفی نشان داده شده است. این نمودارها آشکار می‌سازند که اگرچه افزایش میزان همبستگی میدان تصادفی باعث افزایش ضریب تغییرات پاسخ می‌شود، اما تأثیر آن کمتر از کمانش است؛ به‌گونه‌ای‌که در حالت همبستگی کامل ضریب تغییرات پاسخ ارتعاش، نصف ضریب تغییرات مدول کشسانی صفحه به‌دست می‌آید.



شکل ۵ میزان تغییر ضریب تغییرات پاسخ ارتعاش آزاد در برابر ضریب تغییرات ضریب کشسانی در حالت همبستگی کم



شکل ٦ میزان تغییر ضریب تغییرات پاسخ ارتعاش آزاد در برابر ضریب تغییرات ضریب کشسانی در حالت همبستگی کامل



شکل ۷ میزان حساسیت پاسخ ارتعاش آزاد صفحه به میزان ضریب تغییرات و همبستگی میدان تصادفی

نتیجه گیری

در این مقاله اثر تصادفی‌بودن ضریب کشسانی بر کمانش فشاری و برشی و نیز ارتعاش آزاد صفحهٔ خمشی مورد بررسی قرار گرفت. برای این منظور، از روش اجزای محدود و مونت‌کارلو بهره‌جویی شد. همچنین، میدان تصادفی (ضریب کشسانی) با توزیع نرمال الگوسازی شد و تابع خودهمبستگی فاصله‌ای برای آن به‌کار رفت. با انجام تحلیل کمانش صفحه، مشاهده شد که متغیربودن ضریب کشسانی تأثیر زیادی بر بار کمانش فشاری و برشی دارد. به‌گونه‌ای‌که اگر ضریب تغییرات میدان تصادفی ۳۰ درصد باشد، میزان ضریب تغییرات پاسخ، بسته‌به میزان همبستگی میدان تصادفی، بین ٤ تا ۳۰ درصد خواهد بود. همچنین، آزمون‌های عددی نشان دادند که ضریب تغییرات بار بحرانی برای کمانش فشاری و برشی تقریباً یکسان می‌باشد. همچنین مشاهده شد که متغیر بودن ضریب کشسانی تأثیر کمتری بر پاسخ ارتعاش آزاد صفحه دارد؛ به‌گونه‌ای‌که اگر ضریب تغییرات میدان تصادفی ۳۰ درصد باشد، میزان ضریب تغییرات پاسخ، بسته‌به میزان همبستگی میدان تصادفی، بین ۲ تا ۱۵ درصد خواهد بود.

فهرست علائم

σ_α	انحراف معیار
$R_{\alpha\alpha}$	تابع خود همبستگی
d	طول همبستگی
cov	کوواریانس
α_e	متغیر تصادفی با میانگین صفر
COV	ضریب تغییرات
E	ضریب کشسانی
w	تابع خیز صفحه
S_x	نیروی درون صفحه در راستای x
S_y	نیروی درون صفحه در راستای y
S_{xy}	نیروی برشی وارد بر لبه‌های صفحه
D	سختی صفحه
a	طول صفحه

علائم یونانی

ν	ضریب پواسون
ρ	چگالی (kgm^{-3})
ω_1	بسامد مود اول
λ_1	بسامد بدون بعد مود اول

زیرنویس‌ها

total	کل (ماتریس سختی)
e	جزء
n	شماره جزء
cr	بحرانی
g	هندسی (ماتریس سختی)

واژه‌نامه

ارتعاش آزاد	Free vibration
روش اجزای محدود تصادفی	Stochastic finite element method
شبیه‌سازی مونت کارلو	Monte-Carlo simulation
کمانش	Buckling

مراجع

1. Lima, B.S. and Ebecken, N.F., "A comparison of models for uncertainty analysis by the finite element method", *Finite Elements in Analysis and Design,* Vol. 34, No. 2, pp. 211-232, (2000).
2. Noh, H.C. and Park, T., "Monte Carlo simulation-compatible stochastic field for application to expansion-based stochastic finite element method", *Computers & structures,* Vol. 84, No. 31, pp. 2363-2372, (2006).
3. Stefanou, G., "The stochastic finite element method: past, present and future", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 198, No. 9, pp. 1031-1051, (2009).
4. Chakraborty, S. and Dey, S., "A stochastic finite element dynamic analysis of structures with uncertain parameters", *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 40, No. 11, pp. 1071-1087, (1998).
5. Sepahvand, K., Marburg, S. and Hardtke, H.J., "Stochastic free vibration of orthotropic plates using generalized polynomial chaos expansion", *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 331, No. 1, pp. 167-179, (2012).
6. Shaker, A., Abdelrahman, W.G., Tawfik, M. and Sadek, E., "Stochastic finite element analysis of the free vibration of laminated composite plates", *Computational Mechanics,* Vol. 41, No. 4, pp. 493-501, (2008).
7. Shaker, A., Abdelrahman, W., Tawfik, M. and Sadek, E., "Stochastic finite element analysis of the free vibration of functionally graded material plates", *Computational Mechanics,* Vol. 41, No. 5, pp. 707-714, (2008).
8. Dey, S., Mukhopadhyay, T. and Adhikari, S., "Stochastic free vibration analysis of angle-ply composite plates–a RS-HDMR approach", *Composite Structures,* Vol. 122, pp. 526-536, (2015).
9. Talha, M. and Singh, B., "Stochastic vibration characteristics of finite element modelled functionally gradient plates", *Composite Structures,* Vol. 130, pp. 95-106, (2015).
10. Chakraborty, S., Mandal, B., Chowdhury, R. and Chakrabarti, A., "Stochastic free vibration analysis of laminated composite plates using polynomial correlated function expansion", *Composite Structures,* Vol. 135, pp. 236-249, (2016).
11. Nayak, A. and Satapathy, A., "Stochastic damped free vibration analysis of composite sandwich plates", *Procedia Engineering,* Vol. 144, pp. 1315-1324, (2016).
12. Graham, L. and Siragy, EF, "Stochastic finite-element analysis for elastic buckling of stiffened panels", *Journal of engineering mechanics,* Vol. 127, No. 1, pp. 91-97, (2001).
13. Onkar, A., Upadhyay, C. and Yadav, D., "Stochastic buckling analysis of laminated plates under shear and compression", *AIAA journal,* Vol. 45, No. 8, pp. 2005-2014, (2007).
14. Onkar, A., Upadhyay, C. and Yadav, D., "Generalized buckling analysis of laminated plates with random material properties using stochastic finite elements", *International journal of mechanical sciences,* Vol. 48, No. 7, pp. 780-798, (2006).
15. Kamiński, M. and Świta, P., "Generalized stochastic finite element method in elastic stability problems", *Computers & Structures,* Vol. 89, No. 11, pp. 1241-1252, (2011).
16. Talha, M. and Singh, B., "Stochastic perturbation-based finite element for buckling statistics of FGM plates with uncertain material properties in thermal environments", *Composite Structures,* Vol. 108, pp. 823-833, (2014).
17. Li, J., Tian, X., Han, Z. and Narita, Y., "Stochastic thermal buckling analysis of laminated plates using perturbation technique", *Composite Structures,* Vol. 139, pp. 1-12, (2016).
18. Szilard, R., "*Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods*": John Wiley & Sons, (2004).
19. Quek, S.S. and Liu, G.R., "*Finite Element Method: A Practical Course*": Elsevier Science, (2003).